SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 2002-2003

Angelo Cavallucci

CONDIZIONI NESESSARIE PER CERTI PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

24 giugno 2003

Tecnoprint - Bologna 2005

RIASSUNTO. Vengono esposte alcune recenti condizioni necessarie per certi problemi di ottimizzazione con dati regolari.

ABSTRACT . We present some recent necessary conditions for some types of extremum problems with regular data.

CONDIZIONI NECESSARIE PER CERTI PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

ANGELO CAVALLUCCI

Siano X e Y spazi di Banach reali. Consideriamo il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} f_0(x) \longrightarrow \min \\ f_i(x) \leq 0 \ \text{ per } 1 \leq i \leq m, \\ F(x) = 0, \\ x \in C \cap \Omega, \end{cases}$$

ove C e' convesso chiuso con $int(C) \neq \emptyset$, f_i e F di classe $C^m(\Omega)$, F a valori in Y, $x_* \in \Omega$ aperto in X e $m \geq 1$ opportunamente grande.

E' classico il seguente

Teorema 1. *Sia $x_* \in int(C)$ soluzione del problema (P) e sia $f_i(x_*) = 0$ per $1 \leq i \leq m$, $F(x_*) = 0$ e $F'(x_*)(X)$ chiuso in Y. Allora esistono $\nu_i \geq 0$ per $0 \leq i \leq m, \eta \in y^*$ tali che*

$$\sum_{i=0}^{m} \nu_i f_i'(x_*) + \eta \circ F'(x_*) = 0$$

$$(\nu_0, .., \nu_m, \eta) \neq (0, .., 0)$$

Se inoltre $F'(x_*)(X) = Y$, allora

$$(\nu_0, .., \nu_m) \neq (0, .., 0)$$

Ci proponiamo di esporre alcune condizioni che permettono di avere $(\nu_0, .., \nu_m) \neq (0, .., 0)$ anche se $F'(x_*)(X) =$ chiuso $\neq Y$. Tali condizioni sono dovute a Ledzewicz e Schättler, che estendono precedenti risultati di Avakov.

Il metodo seguito si fonda sulle "curve approssimanti di ordine $p \geq 1$", gia' considerate in precedenza da vari autori, per esempio in [2] nel caso $p = 2$.

Sia $p \geq 1$ intero, $H_p = (h_1, .., h_p) \in X^p$, $f : \Omega \longrightarrow R$. Poniamo, seguendo [8],

$$DS^{(p)}(f; x_*, H_{p-1}) = DS^{(p)}(f; H_{p-1}) =$$

$$\{h \in X \mid \exists T > 0 : \sup_{\substack{0 < t \leq T \\ \|d\| \leq T}} [f(x_* + \sum_{1}^{p-1} t^i h_i + t^p[h + d]) - f(x_*)]/t^p < 0\},$$

$$FS^{(p)}(f \leq 0; x_*, H_{p-1}) = FS^{(p)}(f \leq 0; H_{p-1}) =$$

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

$$\{h \in X |\ \exists T > 0 : \sup_{\substack{0<t\leq T \\ \|d\|\leq T}} f(x_* + \sum_1^{p-1} t^i h_i + t^p[h+d]) \leq 0\},$$

$$FS^{(p)}(C; x_*, H_{p-1}) = FS^{(p)}(C; H_{p-1}) =$$

$$\{h \in X |\ \exists T > 0 : x_* + \sum_1^{p-1} t^i h_i + t^p[h+d] \in C \text{ per } 0 \leq t \leq T, \| d \| \leq T\},$$

$$TS^{(p)}(F = 0; x_*, H_{p-1}) = TS^{(p)}(F = 0; H_{p-1}) =$$

$$\{h \in X |\ \exists r : [0,T] \longrightarrow X, T > 0, \text{ tale che } F(x_* + \sum_1^{p-1} t^i h_i + t^p[h + r(t)]) = 0$$

$$\text{per } 0 \leq t \leq T,\ r(t) \longrightarrow 0 \text{ per } t \longrightarrow 0\}.$$

Poniamo anche per $E \subset X$

$$E^+ = \{\xi \in X^* |\ \forall x \in E : \xi(x) \geq 0\},$$

$$(E) = \{(rx, r) \in X \times R |\ x \in E, r > 0\},$$

$X^* =$ duale di$X$.
Fondamentale per il seguito e' la

Proposizione 1. *Sia x_* soluzione del problema (P) e sia $H_{p-1} = (h_1, .., h_{p-1}) \in X^{p-1}$ tale che*

$$E_i \neq \emptyset \text{ convesso per } 0 \leq i \leq m+2,$$

ove

$$E_0 = DS^{(p)}(f_0; x_*, H_{p-1}),$$
$$E_i = FS^{(p)}(f_i \leq 0; x_*, H_{p-1}), 1 \leq i \leq m,$$
$$E_{m+1} = FS^{(p)}(C; x_*, H_{p-1}),$$
$$E_{m+2} = TS^{(p)}(F = 0; x_*, H_{p-1}).$$

Allora esistono $(\xi_i, \mu_i) \in (E_i)^+$ tali che

$$(\xi_0, .., \xi_{m+2}) \neq (0, .., 0),$$

$$\sum_{i=0}^{m+2} (\xi_i, \mu_i) = (0, 0).$$

La dimostrazione si trova in [8] e si fonda sul noto teorema di Dubovitskii-Miliutin (cfr [1], [2]).

Per $0 \leq i \leq m+1$ gli insiemi E_i sono aperti e si ha

$$h_p \in E_i(H_{p-1}) \Rightarrow E_i(H_p) = X,$$

con $H_p = (H_{p-1}, h_p)$. Inoltre E_{m+1} e' convesso e riesce

$$(E_{m+1})^+ = \{(\xi, \mu) \in X^* \times R |\ \xi(u) + \mu \geq 0, \forall u \in E_{m+1}\}.$$

Per determinare $(E_j)^+$ per i rimanenti valori di j occorre studiare la funzione

$$\phi(t) = f(x_* + \sum_{i=1}^{p} t^i h_i),\ 0 \le t \le T,$$

ove $T > 0, H_p = (h_1, .., h_p) \in X^p, f \in C^m(\Omega, Z)$ con $m \ge p$, $Z = R$ oppure $Z = Y$.

Si ha dalla formula di Taylor per il differenziale di Frechet

$$f(x_* + x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_*) x^k + \| x \|^m \omega(x),$$

con

$$\omega(x) \longrightarrow 0 \text{ per } x \longrightarrow 0$$

e quindi

$$f(x_* + x_1 + .. + x_p) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_p=k} \frac{1}{\alpha!} f^{(k)}(x_*) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} .. x_p^{\alpha_p} +$$

$$\| \sum_1^p x_i \|^m \omega(\sum_1^p x_i),$$

con $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! .. \alpha_p!$. Ne segue

$$f(x_* + th_1 + t^2 h_2 .. + t^p h_p) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha_1+..+\alpha_p=k} \frac{1}{\alpha!} f^{(k)}(x_*) t^{\alpha_1+2\alpha_2+..+p\alpha_p} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} .. h_p^{\alpha_p} +$$

$$t^m \| \sum_1^p t^{i-1} h_i \|^m \omega(\sum_1^p t^i h_i) =$$

$$\sum_{l=0}^{m} t^l Q_l(f; x_*, H_p) + t^m \omega_1(t, h_p)$$

con

$$\sup_{\|h_p\| \le r} \| \omega_1(t, h_p) \| \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0, \forall r > 0,$$

$$Q_l(f; x_*, H_p) = \sum_{k=0}^{l} \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_p=k \\ \alpha_1+2\alpha_2+..+p\alpha_p=l}} \frac{1}{\alpha!} f^{(k)}(x_*) h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} .. h_p^{\alpha_p}.$$

Posto

$$H_0 = () = \emptyset,$$

$$Q_l(f; x_*, H_0) = \begin{cases} f(x_*) \text{ per } l = 0 \\ 0 \text{ per } l \ge 1, \end{cases}$$

si ha

$$Q_l(f; x_*, (h_1)) = \frac{1}{l!} f^l(x_*) h_1^l,$$

$$Q_l(f;x_*,H_p) = Q_l(f;x_*,H_l) \text{ per } 0 \le l \le p,$$

$$Q_l(f;x_*,H_p) = Q_l(f;x_*,H_{p-1}) + Q_{l-p}(f';x_*,H_{l-p})h_p \text{ per } p \le l \le 2p-1.$$

Poniamo anche $m = p$ e

$$Q_l(f;x_*,H_p) = Q_l(f;H_p) = Q_l(f;H_{p-1},h_p)$$

e da quanto sopra otteniamo

$$f(x_* + \sum_1^{p-1} t^i h_i + t^p[h_p + d]) =$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} t^l Q_l(f;H_l) + f'(x_*)[h_p + d] + t^p \omega_2(t,d),$$

con

$$\sup_{\|d\| \le r} \| \omega_2(t,d) \| \longrightarrow 0, \forall r > 0.$$

Di qui si ottiene la seguente proposizione

Proposizione 2. *Per l'insieme E_i definito nella Proposizione 1 si ha, con $s_0 = 1$, $s_i = 0$ per $1 \le i \le m$,*

a) $E_i = X$ se $Q_l(f_i;x_*,H_l) = 0 > Q_s(f_i;x_*,H_s)$ per $s_i \le l < s$, ove $s \le p-1$;

b) $E_i = X$ se $Q_l(f_i;x_*,H_l) = 0$ per $s_i \le l \le p-1$, e $Q_p(f_i;x_*,H_{p-1}) < 0$ e $f'(x_*) = 0$;

c) se $Q_l(f_i;x_*,H_l) = 0$ per $s_i \le l \le p-1$ e $f'(x_*) \ne 0$ si ha

$$E_i = \{h \in X | \; Q_p(f_i;x_*,H_{p-1}) + f'(x_*)h < 0\}$$

e anche

$$(E_i)^+ = \{\alpha f_i'(x_*), \alpha Q_p(f_i;x_*,H_{p-1}) + \beta | \; \alpha \le 0, \beta \ge 0\}$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [8], pag.45 e pag.48.

Resta da studiare l'insieme E_{m+2}. Per questo introduciamo la seguente definizione, seguendo [9].

Definizione 1. *La funzione $F \in C^{2p-1}(\Omega, Y)$ si dice p-regolare in $x_* \in \Omega$ nella direzione $H_{p-1} \in X^{p-1}$ se, posto*

$$Y_0 = 0, \quad Y_{s+1} = Y_s + Q_s(F';x_*,H_s)(X) \text{ per } 0 \le s \le p-1,$$

π_s = proiezione canonica

$$\pi_s : Y_{s+1} \longrightarrow Y_{s+1}/Y_s, \; 1 \le s \le p-1,$$

$$X \ni u \longrightarrow G_p u = (F'(x_*)u, \pi_1 Q_1(F';H_1)u, .., \pi_{p-1} Q_{p-1}(F';H_{p-1})u) \in$$
$$Y_1 \times (Y_2/Y_1) \times .. \times (Y_p/Y_{p-1}),$$

si ha

a) Y_s *e' chiuso per* $1 \leq s \leq p-1$,

b) $Y_p = Y$ *e* G_p *e' surjettiva*

Per $p = 1$ la 1-regolarita' equivale alla surjettivita' di $F'(x_*)$. Per $p = 2$ si ha

a) $Y_1 = F'(x_*)(X)$ e' chiuso,

b) $X \ni u \xrightarrow{su} G_2 u = (F'(x_*)u, \pi_1 F''(x_*)h_1 u) \in Y_1 \times (Y/Y_1)$

e in questo caso la nozione di 2-regolarita' e' dovuta ad Avakov.

Osservazione. *Se* $F \in C^{2p+1}(\Omega, Y)$ *ed e' p-regolare in direzione* H_{p-1}, *allora e' anche (p+1)-regolare in direzione* $H_p = (H_{p-1}, h_p)$ *per ogni* $h_p \in X$.

Infatti si ha

$$Y_p = Y = Y_{p+1},\ Y_{p+1}/Y_p = 0,$$

$$\pi_p Q_p(F'; x_*, H_{p-1}, h_p) = 0,\ \forall h_p \in X.$$

Il seguente teorema caratterizza l'insieme E_{m+2} della Proposizione 1.

Teorema 2. *Supponiamo F p-regolare in* x_* *in direzione* $H_{p-1} = (h_1, .., h_{p-1}) \in X^{p-1}$. *Allora sono equivalenti le affermazioni su* $h_p \in X$

a) $h_p \in TS^{(p)}(F = 0; x_*, H_{p-1})$;

b) $H_p = (h_1, .., h_{p-1}, h_p)$ *verifica le condizioni*

$$Q_s(F; x_*, H_s) = 0 \ \ per\ \ 0 \leq s \leq p-1,$$

$$Q_{p+s}(F; x_*, H_{p-1}) + Q_s(F'; x_*, H_s)h_p \in Y_s \ \ per\ \ 0 \leq s \leq p-1.$$

Per $p = 1$ si ottiene un celebre teorema di Lyusternik (cfr. [1]) e per $p = 2$ il teorema figura fra i risultati di Avakov.
La dimostrazione del teorema si trova in [9]. Qui ci limitiamo ad alcune indicazioni sulla necessita' della condizione b).

Segue da a) e dalla definizione di $TS^{(p)}$ che esiste la funzione

$$[0, T] \ni t \longrightarrow r(t) \in X,\ T > 0,$$

tale che $r(t) \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow 0$ e

$$0 = F(x_* + \sum_1^{p-1} t^i h_i + t^p[h_p + r(t)]) =$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} t^l Q_l(F; H_l) + \sum_{s=0}^{p-1} t^{p+s}[Q_{p+s}(F; H_p) + Q_s(F'; H_s)r(t)] + t^{2p-1}\omega_2(t)$$

con $\omega_2(t) \longrightarrow 0$ per $t \longrightarrow 0$.
Dunque deve essere

$$F(x_*) = 0,$$

$$Q_s(F;H_s)=0 \text{ per } 1\le s\le p-1,$$
$$0=Q_p(F;H_p)=Q_p(F;H_{p-1})+F'(x_*)h_p,$$
$$0=F'(x_*)r(t)+t[Q_{p+1}(F;H_p)+Q_1(F';H_1)r(t)]+t^2[..]$$

e quindi

$$Y_1\ni -\frac{1}{t}F'(x_*)r(t)=Q_{p+1}(F;H_p)+Q_1(F';H_1)r(t)+t[..]$$
$$\longrightarrow Q_{p+1}(F;H_p)\in \bar{Y}_1=Y_1 \text{ per } t\longrightarrow 0.$$

Poniamo

$$-\frac{1}{t}F'(x_*)r(t)=Q_{p+1}(F;H_p)+r_1(t).$$

Allora si ha

$$Y_1\ni r_1(t)\longrightarrow 0 \text{ per } t\longrightarrow 0,$$
$$Y_2=Y_1+Q_1(F';H_1)(X)\ni \frac{[r_1(t)-Q_1(F';H_1)r(t)]}{t}=$$
$$Q_{p+2}(F;H_p)+Q_2(F';H_2)r(t)+t[..]\longrightarrow Q_{p+2}(F;H_p)\in \bar{Y}_2=Y_2.$$

Procedendo in modo analogo si ottiene

$$Y_s\ni Q_{p+s}(F;H_p)=Q_{p+s}(F;H_{p-1})+Q_s(F';H_s)h_p \text{ per } 1\le s\le p-1.$$

Dunque da a) segue b).

Da b) segue che $E_{m+2}=TS^{(p)}(F=0;x_*,H_{p-1})$ e' convesso chiuso e segue anche

$$Q_{p+s}(F;H_{p-1})\in Y_{s+1} \text{ per } 0\le s\le p-1,$$
$$\pi_s Q_{p+s}(F;H_{p-1})\in Y_{s+1}/Y_s \text{ per } 0\le s\le p-1$$

e quindi, per la surjettivita' di G_p, esiste $u\in X$ tale che

$$\pi_s Q_s(F';H_s)u=\pi_s Q_{p+s}(F;H_{p-1}) \text{ per } 0\le s\le p-1.$$

Ne segue che $-u\in TS^{(p)}(F=0;x_*,H_{p-1})$. In conclusione si ha il seguente

Corollario. *Sia F p-regolare in x_* in direzione H_{p-1}. Allora sono equivalenti le affermazioni*

a) $TS^{(p)}(F=0;x_*,H_{p-1})\neq\emptyset$;

b) valgono le condizioni

$$Q_s(F;H_s)=0 \textit{ per } 0\le s\le p-1;$$
$$Q_{p+s}(F;H_{p-1})\in Y_{s+1} \textit{ per } 0\le s\le p-1.$$

Se valgono queste condizioni si ha

$$(TS^{(p)}(F=0;x_*,H_{p-1}))^+=$$
$$\{\sum_{i=0}^{p-1}(\eta_i\circ Q_i(F';h_i),\eta_i(Q_{p+i}(F;H_{p-1})))+(0,r)|\ r\ge 0,\eta_i\in Y_i^{\perp_{i+1}}\},$$

ove

$$Y_i^{\perp_{i+1}}=\{\eta\in Y_{i+1}^*|\ \eta(v)\ge 0\,\forall v\in Y_i\}.$$

Per la dimostrazione si veda [8], Prop.3.6.

Ora sono caratterizzati tutti gli insiemi $(E_i)^+$ della Proposizione 1 e possiamo enunciare il risultato principale di [8].

Teorema 3. *Sia x_* soluzione del problema (P) e supponiamo che $H_{p-1} \in X^{p-1}$ verifichi le condizioni*

a) F e' p-regolare in x_* nella direzione H_{p-1} e inoltre

$$Q_s(F; H_s) = 0 \text{ per } 0 \leq s \leq p-1;$$

$$Q_{p+s}(F; H_{p-1}) \in Y_{s+1} \text{ per } 0 \leq s \leq p-1;$$

b) posto $s_0 = 0, s_i = 1$ per $1 \leq i \leq m, q_s = Q_s(f_i; H_s)$ per $s_i \leq s \leq p-1, q_p = -1$, esiste $\bar{s}_i \leq p$ tale che

$$s_i \leq s < \bar{s}_i \Rightarrow q_s = 0 > q_{\bar{s}_i}, \; 0 \leq i \leq m;$$

c)
$$FS^{(p)}(C; x_*, H_{p-1}) \neq \emptyset.$$

Allora, posto $J = \{i |\ 0 \leq i \leq m, E_i \neq X\}$, esistono $\nu_i \geq 0$ per $i \in J$, $\eta_i \in Y_i^{\perp_{i+1}}$ per $0 \leq i \leq p-1$, $\lambda \in X$, $\mu \in R$ tali che

$$\sum_{i \in J} \nu_i + \| \lambda \| > 0,$$

$$\sum_{i \in J} \nu_i f_i'(x_*) + \sum_{i=0}^{p-1} \eta_i \circ Q_i(F'; H_i) = \lambda,$$

$$\sum_{i \in J} \nu_i (Q_p(f_i; H_{p-1})) + \sum_{i=0}^{p-1} \eta_i (Q_{p+i}(F; H_{p-1})) \geq \mu,$$

$$\lambda(u) + \mu \geq 0, \forall u \in FS^{(p)}(C; x_*, H_{p-1}).$$

Segue dalla Proposizione 2 che per $i \in J$ deve essere

$$Q_s(f_i; H_s) = 0 \text{ per } s_i \leq s \leq p-1,$$

$$f_i'(x_*) = 0 \Rightarrow Q_p(f_i; H_{p-1}) \geq 0$$

e quindi basta porre $\nu_i = 1$, $\nu_j = 0$ per $i \neq j \in J$, $\eta_j = 0$ per $0 \leq j \leq p-1$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ per soddisfare tutte le condizioni richieste. Resta da trattare il caso $f_i'(x_*) \neq 0$ per ogni $i \in J$ e per questo si puo' applicare la Proposizione 1, come in [8], Theor.7.1.

Osserviamo che per $p = 1$ dal Teorema 3 segue il Teorema 1 nell'ipotesi di surjettivita' di $F'(x_*)$. Per $p = 2$ il Teorema 3 figura fra i risultati di Avakov.

Consideriamo il caso $p = 2$ per il problema (P) in assenza dei vincoli $f_i(x) \leq 0$, $1 \leq i \leq m$. Dal Teorema 3 si ottiene il seguente

Corollario. *Sia x_* soluzione del nostro problema (P) e supponiamo che $H_1 = (h)$ verifichi le condizioni*

a) $$F'(x_*)h = 0,$$

$$F''(x_*)h^2 \in F'(x_*)(X) = Y_1 = \text{ chiuso in } Y = Y_2,$$

$$X \ni u \xrightarrow{su} G_2 u = (F'(x_*)u, \pi_1 F''(x_*)hu) \in Y_1 \times (Y_2/Y_1);$$

b) $$f'(x_*) \neq 0,\ f'(x_*)h = 0;$$

c) $$FS^{(2)}(C; x_*, H_1) \neq \emptyset.$$

Allora esistono $\nu_0 \geq 0$, $\lambda \in X^*$, $\eta_0 \in Y_1^*$, $\eta_1 \in Y^*$, $\mu \in R$ tali che

$$(\nu_0, \lambda) \neq (0,0),$$

$$\nu_0 f_0'(x_*) + \eta_0 \circ F'(x_*) + \eta_1 \circ F''(x_*)h(.) = \lambda,$$

$$\nu_0(f_0''(x_*)h^2) + \eta_0(F''(x_*)h^2) + \frac{1}{3}\eta_1(F'''(x_*)h^3) \geq \mu,$$

$$\eta_1(F'(x_*)u) = 0,\ \forall u \in X,$$

$$\lambda(u) + \mu \geq 0,\ \forall u \in FS^{(2)}(C; x_*, H_1).$$

Consideriamo il problema di controllo

$$(P1) \qquad \begin{cases} l(x(1))) + \int_0^1 L(t, x(t), u(t))\, dt \longrightarrow \min \\ x \in W_1^1(0,1;R^n),\ u \in L^\infty(0,1;R^m), \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \ \text{ per } 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = 0,\ q(x(1)) = 0, \\ u(t) \in U \ q.d. \end{cases}$$

Supponiamo che le funzioni

$$[0,1] \times R^n \times R^m \ni (t,x,u) \longrightarrow (L(t,x,u), f(t,x,u)) \in R \times R^n,$$

$$R^n \ni x \longrightarrow (l(x), q(x)) \in R \times R^k$$

siano di classe C^μ rispetto a x,u, con $\mu \geq 1$ opportuno, che i relativi differenziali di ordine $\leq \mu$ siano t-misurabili e localmente limitati. Supponiamo inoltre:

q'(x) e' surjettivo per ogni $x \in R^n$,

U e' convesso chiuso con $int(U) \neq \emptyset$.

Su $W_1^1(0,1;R^n)$ viene utilizzata la norma

$$\| x \| = |x(0)| + \| \dot{x} \|_1 .$$

In [7] viene fatta una "traduzione" del Teorema 3 per il problema (P1). Per questo poniamo

$$V = \{(x,u) \in W_1^1(0,1;R^n) \times L^\infty(0,1;R^m) |\ x(0) = 0\},$$

$$C = \{(x,u) \in V |\ u(t) \in U q.d.\},$$

$$I(x,u) = l(x(1)) + \int_0^1 L(t, x(t), u(t))\, dt,$$

$$F(x,u)(t) = (x(t) - \int_0^t f(s, x(s), u(s))\, ds,\ q(x(1))),\ 0 \le t \le 1,$$

per $(x,u) \in V$.
Poniamo anche per $A : R^n \longrightarrow R^\nu$ lineare

$$zA = A^* z,\ z \in R^\nu.$$

Si ha per (x,u), $(h,v) \in V$, $0 \le t \le 1$,

$$F'(x,u)(h,v)(t) =$$

$$(h(t) - \int_0^t [f_x(s, x(s), u(s))h(s) + f_u(s, x(s), u(s))v(s)]\, ds,\ q'(x(1))h(1)).$$

In [7] si prova che $F'(x,u)(V)$ e' chiuso in

$$Y = \{y \in W_1^1(0,1;R^n) |\ y(0) = 0\} \times R^k$$

e ha codimensione finita data dal numero di soluzioni linearmente indipendenti $\phi \in W_1^1(0,1;R^n)$ del sistema

$$\dot{\phi}(t) + \phi(t) f_x(t, x(t), u(t)) = 0,\ 0 \le t \le 1,$$

$$\phi(t) f_u(t, x(t), u(t)) = 0,\ 0 \le t \le 1,$$

$$\phi(1) \in [q'(x(1))^{-1}(0)]^\perp.$$

Dal teorema 3 si ottiene il seguente

Teorema 4. *Sia $v_* = (x_*, u_*)$ un punto di minimo locale per il problema (P1). Supponiamo che $H_{p-1} = (h_1, .., h_{p-1}) \in V^{p-1}$ verifichi le condizioni*

a) F e' p-regolare in v_* in direzione H_{p-1} e inoltre

$$Q_i(H_i) = 0 \quad per\ 0 \le i \le p-1,$$

$$Q_{p+i}(F; H_{p-1}) \in Y_{i+1} \quad per\ 0 \le i \le p-2;$$

b) $$I'(v_*) \ne 0 \ e\ Q_i(I; v_*, H_i) = 0 \quad per\ 1 \le i \le p-1;$$

c) $$FS^{(p)}(C; v_*, H_{p-1}) \ne \emptyset.$$

Allora esistono $\nu_0 \ge 0$, $a_i \in R^k$ per $0 \le i \le p-1$, ψ e $\rho_i \in W_1^1(0,1;R^n)$ per $1 \le i \le p-1$ tali che

i) $(\nu_0, \lambda) \ne (0,0)$ con λ data da

$$\lambda(v) = \int_0^1 < \nu_0 L_u + \psi f_u + \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i Q_i(f_u; H_i), v > dt,\ \ per\ v \in L^\infty(0,1;R^m);$$

ii)
$$-\dot{\psi}(t) = \nu_0 L_x + \psi(t) f_x + \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i(t) Q_i(f_x; H_i),$$

$$\psi(1) = \nu_0 l'(x_*(1)) + a_0 q(x_*(1) + \sum_{i=1}^{p-1} a_i Q_i(q; H_i);$$

iii)
$$\dot{\rho}_i(t) = -\rho_i(t) f_x,\ \rho_i(t) f_u \equiv 0,\ \rho_i(1) = a_i q(x_*(1)),$$

$$\rho_i(t) Q_j(f_x; H_j) \equiv 0,\ \rho_i(t) Q_j(f_u; H_j) \equiv 0,\ a_i Q_j(q'; H_j) = 0$$
$$\textit{per } 1 \le j \le i-1,\ 1 \le i \le p-1;$$

iv)
$$\textit{per ogni } (0,u) \in FS^{(p)}(C; v_*, H_{p-1}) \textit{ si ha}$$

$$0 \le \nu_0 Q_p(l; H_{p-1}) + \sum_{i=0}^{p-1} a_i Q_{p+i}(q; H_{p-1}) +$$

$$+ \int_0^1 < \nu_0 L_u + \psi f_u + \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i Q_i(f_u; H_i), u > dt +$$

$$+ \int_0^1 [\nu_0 Q_p(L; H_{p-1}) + \psi Q_p(f; H_{p-1}) + \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i Q_{p+i}(f; H_{p-1})]\, dt$$

Tutte le funzioni f, L, f_x, L_x,.. sono calcolate in $(t, x_*(t), u_*(t))$.

Corollario. *Segue da iv) che si ha per ogni $u \in U$*

$$< \nu_0 L_u + \psi(t) f_u + \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i(t) Q_i(f_u; H_i), u - u_*(t) > \ge 0 \; q.d.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [7].

Mostriamo con un esempio come il Teorema 4 possa essere usato per escludere che un fissato punto $v_* = (x_*, u_*)$ possa essere un punto di minimo locale.

Esempio. *Condideriamo il problema*

$$\begin{cases} I_\pm = \int_0^1 [(x_1 - 1)^2 + x_2^p + (x_3 \pm 1)^2 - 2]\, dt \longrightarrow \ min \\ (x,u) \in V, \\ \dot{x}(t) = A(x(t)) + Bu(t)) \quad per\ 0 \le t \le 1, \\ x(0) = 0,\ x_1(1) = 0 = x_3(1), \end{cases}$$

con

$$V = \{(x,u) \in W_1^1(0,1; R^3) \times L^\infty(0,1; R^2) |\ x(0) = 0\},$$

$$A(x) = (0, x_1^p, \alpha x_2^{p-1} x_3),$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$p \geq 2$ intero, α reale.

Si ha per $0 \leq t \leq 1$

$$F(x,u)(t) = (x(t) - \int_0^t [A(x(s) + Bu(s))]\, ds, (x_1(1)), x_3(1)),$$

$$F'(x,u)(y,w)(t) = (y(t) - \int_0^t [A'(x(s)y(s) + Bw(s))]\, ds, (y_1(1)), y_3(1)).$$

Cerchiamo, seguendo [7], se $I_\pm$ possa avere un minimo locale in $v_* = (x_* = 0, u_* = 0)$. Posto

$$Y = \{(y,z) \in W_1^1(0,1;R^3) \times R^2 |\ y(0) = 0\},$$

si ha

$$F'(v_*)(V) = \{(y,z) \in Y |\ y_1(1) + y_3(1) = z_1 + z_2\},$$

$$F'(v_*)(x,u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1(t) = \int_0^t u_2(s)\, ds = -x_3(t), \\ x_2(t) = -\int_0^t u_1(s)\, ds, \\ \int_0^1 u_2(s)\, ds = 0 \end{array} \right.$$

Affinche'

$$H_{p-1} = ((x_1,u_1),(x_2,u_2),..,(x_{p-1},u_{p-1})) \in V^{p-1}$$

verifichi la condizione a) del Teorema 4 deve essere

$$0 = Q_1(F; v_*, H_1) = F'(v_*)(x_1,u_1),$$

$$0 = Q_i(F; v_*, H_i) = F'(v_*)(x_i,u_i) \text{ per } 2 \leq i \leq p-1$$

e queste condizioni sono soddisfatte da

$$H_{p-1} = ((\bar{x},\bar{u}),(0,0),..,(0,0))$$

con

$$F'(v_*)(\bar{x},\bar{u}) = 0.$$

Per tale H_{p-1} si ha anche

$$Q_{p+i}(F; v_*, H_{p-1}) = 0 \text{ per } 1 \leq i \leq p-1,$$

$$Q_i(F'; v_*, H_i) = 0 \text{ per } 0 \leq i \leq p-2,$$

$$Q_p(F; v_*, H_{p-1})(t) = (-\frac{1}{p!}\int_0^t A^{(p)}(0)\bar{x}(s)\, ds, (0,0)).$$

Se poniamo in H_{p-1}

$$\bar{x}_1(t) = 0 = \bar{x}_3(t),\ \bar{u}_2(t) = 0 \text{ per } 0 \leq t \leq 1$$

e prendiamo $\bar{x}_2 \not\equiv 0$ con $\bar{x}_2(0) = 0 = \bar{x}_2(1)$, allora H_{p-1} verifica la condizione a) del Teorema 4 e anche la condizione b) per I_+. Vale inoltre la condizione c)con $C = V$ e quindi $FS^{(p)}(C; v_*, H_{p-1}) = V$. Infine in [7] si prova che si puo' prendere $\bar{x}_2$ in V^{p-1} tale che non possa essere soddisfatta la condizione iv) del Teorema 4. Dunque I_+ non puo' avere un minimo locale in $v_* = (0,0)$. In modo analogo si prova in [7] che I_- non ha un minimo locale in $v_* = (0,0)$ per $p > 2$ dispari oppure per $p = 2$ e $\alpha > 2 + \frac{1}{\pi^2}$.

BIBLIOGRAFIA

1. Alekseev, V.M.; Tikhomirov, V.M.; Fomin, S.V.
Optimal control. Transl. from the Russian by V. M. Volosov.
Contemporary Soviet Mathematics. New York etc.: Consultants Bureau. xiii,

2. Ben-Tal, A.; Zowe, J.
A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces.
Math. Program. Study 18, 39-76 (1982).

3. Avakov, E.R.
Necessary first-order conditions for anormal variational-calculus problems.
Differ. Equations 27, No.5, 495-500 (1991); translation from Differ. Uravn. 27, No.5, 739-745 (1991).

4. Avakov, E.R.
Theorems on estimates in the neighborhood of a singular point of a mapping.
Math. Notes 47, No.5, 425-432 (1990); translation from Mat. Zametki 47, No.5, 3-13 (1990).

5. Avakov, E.R.
Necessary conditions for a minimum for nonregular problems in Banach spaces. A maximum principle for abnormal optimal control problems.
Proc. Steklov Inst. Math. 185, 1-32 (1990); translation from Tr. Mat. Inst. Steklova 185, 3-29 (1988).

6. Avakov, E.R.
Necessary extremum conditions for smooth anormal problems with equality- and inequality-type constraints.
Math. Notes 45, No.6, 431-437 (1989); translation from Mat. Zametki 45, No.6, 3-11 (1989).

7. Ledzewicz, Urszula; Schaettler, Heinz
A high-order generalized local maximum principle.
SIAM J. Control Optimization 38, No.3, 823-854 (2000).

8. Ledzewicz, Urszula; Schaettler, Heinz
High-order approximations and generalized necessary conditions for optimality.
SIAM J. Control Optimization 37, No.1, 33-53 (1999)

9. Ledzewicz, Urszula; Schaettler, Heinz
A high-order generalization of the Lyusternik theorem.
Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 34, No.6, 793-815 (1998)

10. Ledzewicz, U.; Schaettler, H.
Second-order conditions for extremum problems with nonregular equality constraints.
J. Optimization Theory Appl. 86, No.1, 113-144 (1995)